

二次根式的基本概念及运算（加油站）

一、二次根式的基本概念

1. 下列式子：① $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ，② $\sqrt{-3}$ ，③ $-\sqrt{x^2+1}$ ，④ $\sqrt[3]{27}$ ，⑤ $\sqrt{(-2)^2}$ ，是二次根式的有（ ）。
- A. ①③ B. ①③⑤ C. ①②③ D. ①②③⑤

【答案】 B

【解析】 二次根式是指形如 $\sqrt{a}$ （ $a \geq 0$ ）的代数式，故

① $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 是二次根式；

② $\sqrt{-3}$ 不是二次根式；

③ $-\sqrt{x^2+1}$ 是二次根式；

④ $\sqrt[3]{27}$ 不是二次根式；

⑤ $\sqrt{(-2)^2}$ 是二次根式；

故二次根式有①③⑤。

故选B。

【标注】 【知识点】 二次根式的定义

2. 当 x 是怎样的实数时，下列式子在实数范围内有意义。

(1) $\sqrt{3-x}$

(2) $\sqrt{(x-1)^2}$

(3) $\sqrt{x^2+1}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

(5) $\frac{\sqrt{1-x}}{2+x}$

【答案】 (1) $x \leq 3$.

(2) 任意实数 .

(3) 任意实数 .

(4) $x > \frac{1}{2}$.

(5) $x \leq 1$ 且 $x \neq -2$.

【解析】 (1) $\because 3 - x \geq 0$,

$\therefore x \leq 3$.

(2) $\because (x - 1)^2 \geq 0$,

$\therefore x$ 为任意实数 .

(3) $\because x^2 + 1 > 0$,

$\therefore x$ 为任意实数 .

(4) $\because 2x - 1 > 0$,

$\therefore x > \frac{1}{2}$.

(5) $\because 1 - x \geq 0$ 且 $2 + x \neq 0$,

$\therefore x \leq 1$ 且 $x \neq -2$.

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

3. 在函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 () .

A. $x \geq 2$

B. $x > 2$

C. $x \leq 2$

D. $x < 2$

【答案】 B

【解析】 由题意得, $x - 2 > 0$,

解得 $x > 2$,

故选 : B .

【标注】【知识点】函数自变量的取值范围

4. 若 $\frac{\sqrt{x+4}}{x-1}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 () .

A. $x > -4$

B. $x \geq -4$

C. $x > -4$ 且 $x \neq 1$

D. $x \geq -4$ 且 $x \neq 1$

【答案】 D

【解析】 $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq 1 \end{cases} .$

故选：D .

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

5. 要使代数式 $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ 有意义，则 x 的取值范围是 () .

A. $x > -1$

B. $x \geq -1$

C. $x \neq 0$

D. $x > -1$ 且 $x \neq 0$

【答案】 A

【解析】 依题意得： $x+1 > 0$,

解得 $x > -1$.

故选：A .

【标注】【知识点】二次根式与分式有意义综合

6. 要使式子 $\frac{\sqrt{a+2}}{a}$ 有意义，则 a 的取值范围为 _____ .

【答案】 $a \geq -2$ 且 $a \neq 0$

【解析】 根据题意得： $a+2 \geq 0$ 且 $a \neq 0$,

解得： $a \geq -2$ 且 $a \neq 0$.

【标注】【知识点】二次根式有意义的条件

7. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 且满足 $(a-5)^2 + |b-12| + \sqrt{c-13} = 0$, 则 $\triangle ABC$ () .

A. 不是直角三角形

B. 是以 c 为斜边的直角三角形

C. 是以 b 为斜边的直角三角形

D. 是以 a 为斜边的直角三角形

【答案】 B

【解析】 $a = 5, b = 12, c = 13$,

$a^2 + b^2 = c^2$, 故选B .

【标注】【知识点】勾股定理的逆定理

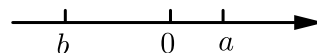
8. 已知 $b = \frac{\sqrt{a^2-4} + \sqrt{4-a^2} - 12}{a-2}$, 则 b^a 的值为 _____ .

【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】 $\because \sqrt{a^2-4}, \sqrt{4-a^2}$ 均有意义 ,
 $\therefore a^2-4 \geq 0, 4-a^2 \geq 0,$
 $\therefore a^2-4=0$, 即 $a = \pm 2$,
 又 $\because a-2 \neq 0$,
 $\therefore a \neq 2$,
 $\therefore a = -2$,
 $\therefore b = \frac{-12}{-2-2} = 3$,
 $\therefore b^a = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

【标注】 【知识点】 二次根式的性质

9. 实数 a, b 在数轴上的位置如图所示 , 则 $\sqrt{(a+b)^2} + a$ 的化简结果为 _____ .



【答案】 $-b$

【解析】 $\because$ 由数轴可知 : $b < 0 < a, |b| > |a|$,
 $\therefore \sqrt{(a+b)^2} + a = |a+b| + a = -a-b+a = -b$.

【标注】 【知识点】 二次根式与数轴综合

10. $\sqrt{(x-2)^2} + (\sqrt{2-x})^2$ 的值一定是 () .

A. 0

B. $4-2x$

C. $2x-4$

D. 4

【答案】 B

【解析】 由二次根式的双重非负性 ,
 $\sqrt{(x-2)^2} + (\sqrt{2-x})^2$ 中 ,
 $\begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq 2$,
 $\therefore \sqrt{(x-2)^2} = 2-x$,

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2-x})^2 &= 2-x, \\
 \therefore \sqrt{(x-2)^2} + (\sqrt{2-x})^2 &= 2-x+2-x, \\
 &= 4-2x.
 \end{aligned}$$

故选B.

【标注】【知识点】利用二次根式非负性化简求值

二、二次根式的运算

11. 如果 $ab > 0$, $a + b < 0$, 那么下面各式: ① $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ② $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = 1$, ③ $\sqrt{ab} \div \sqrt{\frac{a}{b}} = -b$, 其中正确的是().
- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

【答案】B

【解析】 $\because ab > 0, a + b < 0$,

$$\therefore a < 0, b < 0$$

① $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, 被开方数应 ≥ 0 , a, b 不能做被开方数, 故①错误,

② $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = 1$, $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = \sqrt{1} = 1$, 故②正确,

③ $\sqrt{ab} \div \sqrt{\frac{a}{b}} = -b$, $\sqrt{ab} \div \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{ab} \div \frac{\sqrt{ab}}{-b} = \sqrt{ab} \times \frac{-b}{\sqrt{ab}} = -b$, 故③正确.

故选: B.

【标注】【知识点】已知范围的二次根式化简求值

12. 计算 $2\sqrt{12} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \div \sqrt{3}$ 的结果是().
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】原式 $= \left(2 \times \frac{1}{4}\right) \times \sqrt{12 \times 3 \div 3}$
 $= \frac{1}{2} \times \sqrt{12}$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} .$$

故选：C .

【标注】【知识点】二次根式的乘除混合运算

13. 计算： $\sqrt{3}(\sqrt{12} + 5\sqrt{8}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $6 + 10\sqrt{6}$

【解析】 原式 $= \sqrt{36} + 5\sqrt{24}$
 $= 6 + 10\sqrt{6} .$

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

14. 计算： $\sqrt{12} \div \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{12}} \right) .$

【答案】 12 .

【解析】 原式 $= \sqrt{12} \div \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{12}} \right) ,$
 $= \sqrt{12} \div \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) ,$
 $= \sqrt{12} \div \frac{\sqrt{3}}{6} ,$
 $= 12 .$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的四则混合运算

15. 计算： $(2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}) \div \sqrt{6} .$

【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 原式 $= (8\sqrt{3} - 9\sqrt{3}) \div \sqrt{6}$
 $= -\sqrt{3} \div \sqrt{6}$
 $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【标注】 【知识点】 二次根式的四则混合运算

【能力】 运算能力

16. 计算 :

(1) $(\sqrt{12} + 5\sqrt{8}) \times \sqrt{3}$.

(2) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$.

【答案】 (1) $6 + 10\sqrt{6}$.

(2) $-2 - 2\sqrt{6}$.

【解析】 (1) 原式 $= (2\sqrt{3} + 10\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$
 $= 6 + 10\sqrt{6}$.

(2) 原式 $= 5 - 2 - (3 + 2\sqrt{6} + 2)$
 $= 3 - 5 - 2\sqrt{6}$
 $= -2 - 2\sqrt{6}$.

【标注】 【能力】 运算能力

【思想】整体思想

【知识点】二次根式的四则混合运算

【方法】整体法

17. 计算：

(1) $2\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{48}$.

(2) $(\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} + 5)$.

【答案】(1) $14\sqrt{3}$.

(2) $17 + 8\sqrt{2}$.

【解析】(1) 原式 $= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 12\sqrt{3}$
 $= 14\sqrt{3}$.

(2) 原式 $= 2 + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 15$
 $= 17 + 8\sqrt{2}$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的加减以及混合运算

【知识点】二次根式的四则混合运算

18. 已知： $xy > 0$ ，化简二次根式 $x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$ 的正确结果为 () .

A. $\sqrt{y}$

B. $\sqrt{-y}$

C. $-\sqrt{y}$

D. $-\sqrt{-y}$

【答案】D

【解析】根据题意， $xy > 0$ ，得 x 和 y 同号，

又 $x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$ 中， $-\frac{y}{x^2} \geq 0$ ，得 $y < 0$ ，

故 $x < 0$ ， $y < 0$ ，

$$\text{所以原式} = \frac{x\sqrt{-y}}{\sqrt{x^2}} = \frac{x\sqrt{-y}}{|x|} = \frac{x}{-x}\sqrt{-y} = -\sqrt{-y}.$$

故选D.

【标注】【知识点】已知范围的二次根式化简求值

19. 若 $x < 0$, 那么 $\frac{1}{y}\sqrt{xy^3} - x\sqrt{\frac{y}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0

【解析】 $\frac{1}{y}\sqrt{xy^3} - x\sqrt{\frac{y}{x}}$ 有意义, 且 $x < 0$,

$$\therefore y < 0,$$

$$\therefore \frac{1}{y}\sqrt{xy^3} - x\sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{y^2}} \cdot \sqrt{xy^3} + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{y^2} \cdot xy^3} + \sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}},$$

$$= -\sqrt{xy} + \sqrt{xy},$$

$$= 0.$$

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

20. 已知 $x = \sqrt{3} + 1$, $y = \sqrt{3} - 1$, 求下列各式的值.

(1) $x^2 + 2xy + y^2$.

(2) $x^2 - y^2$.

【答案】 (1) 12.

(2) $4\sqrt{3}$.

【解析】 (1) $\because x = \sqrt{3} + 1, y = \sqrt{3} - 1,$

$$\therefore x + y = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12.$$

$$(2) \therefore x = \sqrt{3} + 1, y = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore x + y = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3}, x - y = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 = 2,$$

$$\therefore x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}.$$

【标注】【方法】代入法

【知识点】二次根式的四则混合运算

【知识点】利用完全平方公式因式分解

【知识点】利用平方差公式因式分解

【知识点】整式乘除化简求值-直接代入化简求值

【能力】运算能力